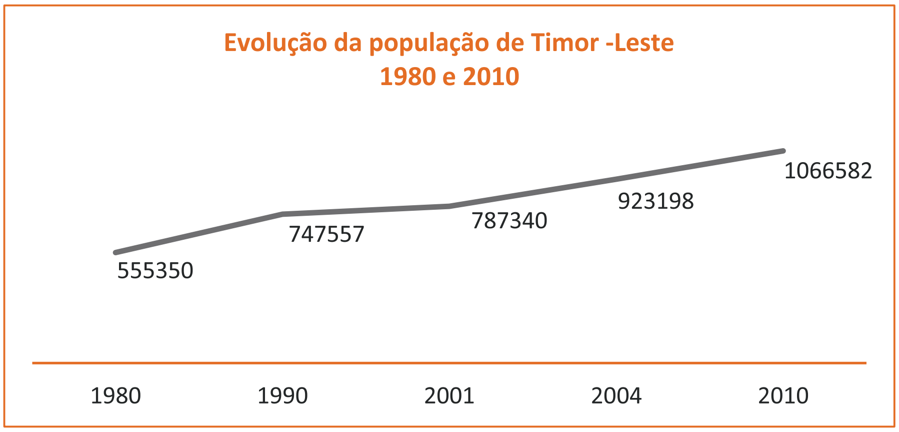
## Estudo de Funções na Análise Económica

### 1.1 Leitura e Interpretação de gráficos em contextos económicos

#### Situação 1

Observa a informação traduzida pelo gráfico que se segue




Fonte: Timor – Leste, Censos 2010- resultados preliminares

Depois de analisares atentamente a informação contida no gráfico anterior, tenta responder às seguintes questões.

**1.** Na primeira década, qual é a percentagem de crescimento da população?

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

**2.** Determina o aumento médio anual da população de Timor-Leste entre 2004 e 2010.

**3.** Comenta a seguinte afirmação: *"De 1990 a 2001, a população cresceu cerca de 5,3% ao ano"*.

Justifica a tua resposta apresentando todos cálculos que efetuares.

**4.** Comenta a seguinte afirmação: *"O gráfico 1 representa uma correspondência crescente"*.

**Soluções – Situação 1**

1. Aproximadamente, 34,6%.

2. Aproximadamente, 23897 pessoas por ano.

3. A afirmação é falsa, pois o valor referido é relativo à percentagem de aumento da população de 1990 a 2001.

4. A correspondência é crescente, pois com o decorrer do tempo a população em Timor-Leste aumenta.

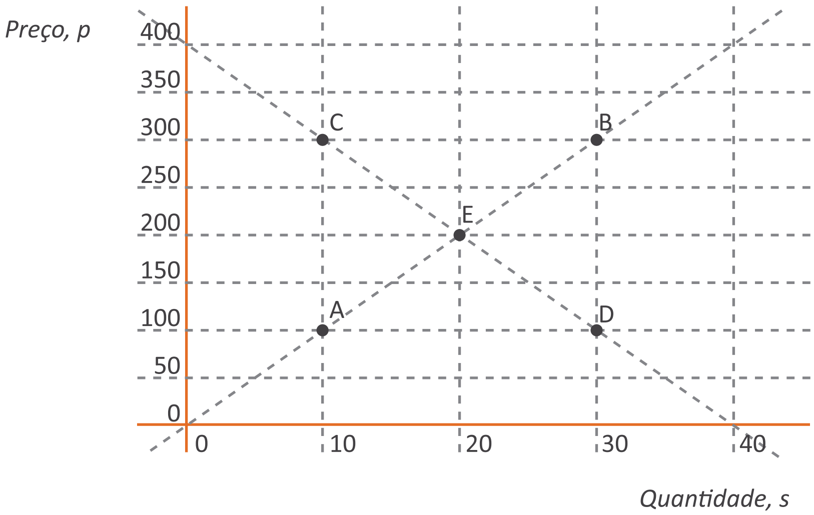
Para dares resposta às questões da situação 1, tiveste por base uma figura que transmitia informação relativa à evolução da população do nosso país entre 1980 e 2010, ou seja, baseaste as tuas respostas na interpretação de um **gráfico**.

Os meios de comunicação (como por exemplo, revistas, jornais e televisão) utilizam frequentemente este recurso para veicular de maneira clara, simples e compacta vários tipos de informação, tais como: resultados de pesquisa de opinião, dados estatísticos, variação de indicadores financeiros, variação de indicadores de populações, entre outros.

Efetivamente, os gráficos são um instrumento de bastante relevo na economia moderna. Os aspetos a ter em atenção acerca de um gráfico são: *Qual é o título do gráfico? O que está representado em cada um dos eixos (horizontal e vertical)? Quais as unidades de cada eixo? Que tipo de relação é que está patente na curva ou curvas que estão representadas no gráfico?*

## Situação 2

O gráfico seguinte representa graficamente as curvas de oferta e da procura acerca de um determinado bem.




**Soluções – Situação 2**

1. A (10, 100); B (30, 300); C(10,300); E(20, 200); D (30, 100).

2. O ponto E (20, 200) representa o ponto de equilíbrio entre a oferta e a procura.

3. A afirmação é verdadeira, pois à medida que aumenta a quantidade da procura do bem, o seu preço aumenta proporcionalmente. Aliás, pode-se observar que a curva da procura está contida numa reta que passa na origem do referencial.

**1.** Determina as coordenadas dos pontos assinalados no gráfico anterior.

**2.** O que representa, no contexto da situação descrita, o ponto E?

**3.** Comenta a seguinte afirmação: *"O preço do bem é diretamente proporcional à quantidade procurada do mesmo"*.

## 1.2 Conceito de função

Através de uma análise simples do comportamento da oferta e da procura no mercado de um determinado bem, vamos introduzir o conceito de função.

No que respeita à lei da procura, reconhecemos que a quantidade de um bem que as pessoas estão dispostas a comprar **depende** (é função) do seu preço. Quanto mais elevado for o preço de um bem menor será a quantidade que as pessoas estão dispostas a comprar. Por outro lado, considerando outros fatores constantes, quanto mais baixo for o preço de mercado desse bem, maior será a quantidade procurada.

Analogicamente, a nível da oferta, a quantidade que os produtores estão dispostos a oferecer **depende** (é função) do preço de mercado desse bem. Quanto mais elevado for o preço de mercado de um bem, maior será a quantidade desse bem que os produtores estão dispostos a oferecer.

Um dos conceitos mais utilizados em Matemática é o de **função**. Este é aplicado não somente a esta área, mas também à Física, à Química, à Biologia, à Economia, à Geografia e entre outras. Além disso, está muito presente no nosso quotidiano, ajudando a compreender melhor o mundo que nos rodeia, através da modelação

No gráfico da **situação 2**, podemos observar que a cada quantidade do bem, oferecida ou procurada, corresponde um e um só preço. Diz-se, portanto, que estamos perante uma correspondência **unívoca**.

De acordo com o referido anteriormente, podemos afirmar que ***existe uma relação*** definida entre o preço, *p*, de mercado de um bem e quantidade, *s*, desse bem que é procurada.

Neste caso, o preço de mercado, *p*, é a **variável dependente** e a quantidade do bem procurada, *s*, é a **variável independente**.

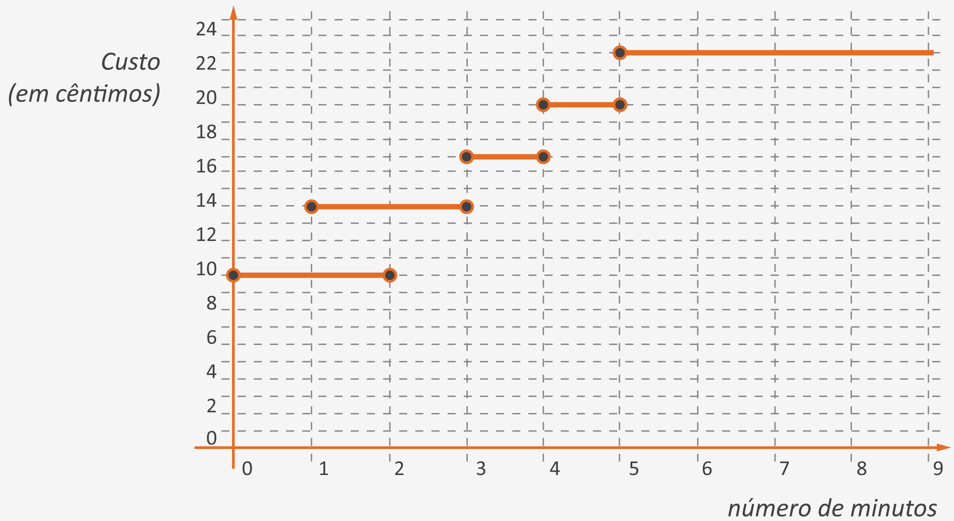
Portanto, a cada valor de s corresponde um e um só preço *p*. Diz-se que existe uma ***função* (correspondência unívoca)** que aplica *s* em *p*.

**Definição**

Uma **função** é uma correspondência entre dois conjuntos que a cada elemento *x* do primeiro conjunto associa um e um só elemento *f(x)* do segundo conjunto.

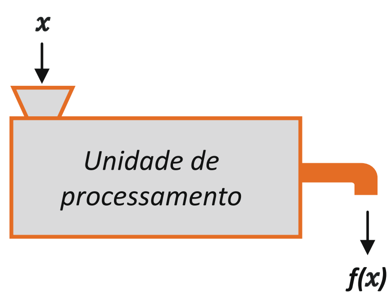
TAREFA **1:**

**1.** Explica a razão que leva a uma empresa de telefones não definir taxas para chamadas telefónicas, conforme ilustrado no gráfico da figura seguinte.




**Exemplo resolvido – a "máquina" de funções**

Considera uma "máquina" cuja unidade de processamento é composta por uma regra que ao introduzir um elemento *x* a máquina devolve um novo elemento (de acordo com a regra), *f(x)*.




Supõe que ao introduzir o nome de um país a unidade de processamento devolve o nome da respetiva capital. Por exemplo, ao introduzir Timor--Leste, a máquina devolve Dili.

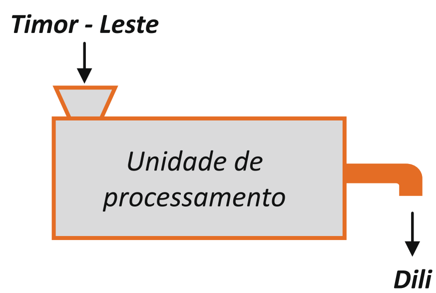
Repara que a cada elemento *x* do conjunto *A* (países), corresponde um e um só elemento, *f(x)* do conjunto *B* (a cidade que é a sua capital). Esta correspondência é, portanto, uma função.

*Se se pretender introduzir os países Timor-Leste, Portugal, Austrália, Indonésia, China, Japão, quais são os elementos que a máquina devolve?*

*Considerando B o conjunto formado pelas cidades, tem-se B={Dili, Lisboa, Camberra, Jacarta, Pequim, Tóquio}.*

*Ao conjunto dos valores que a variável independente, x, pode tomar dá-se o nome de domínio da função, o qual poderá ser designado por D.*

*Tomando o exemplo anterior, o domínio da função é D = {Timor-Leste, Portugal, Austrália, Indonésia, China, Japão}.*



Os elementos do domínio podem ser designados por **objetos**. Portanto, neste caso, os objetos são: Timor-Leste, Portugal, Austrália, Indonésia, China e Japão.

A cada elemento do conjunto *B* que corresponde a algum elemento do conjunto A designa-se por **imagem**. Por exemplo, a imagem de Timor Leste é Dili, a imagem de Portugal é Lisboa.

Ao conjunto das imagens dá-se o nome de **contradomínio da função**, que poderá ser designado por *D'*.

No exemplo considerado, *D'* = {Dili, Lisboa, Camberra, Jacarta, Pequim, Tóquio}.

TAREFA **2:**

Considera o exemplo **"a máquina" de funções**. Supõe que ao introduzir um número natural inferior a 10, a máquina devolve a soma desse número com - 2.

**1.** Indica o domínio e o contradomínio da função.

**2.** Qual é a imagem de 1?

**3.** Qual é o objeto que tem por imagem 6?

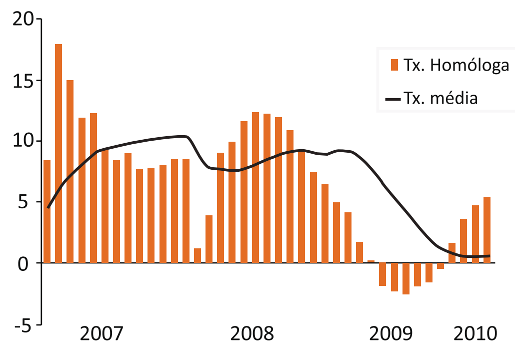
**4.** Qual é o objeto que tem imagem nula?

**5.** Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra da unidade de processamento.

## 1.3 Gráfico de uma função

Uma das representações gráficas mais comuns e importantes em Economia e Matemática é o gráfico de uma função. Veja-se o exemplo ao lado.

INFLAÇÃO (2007 - 2010)
Taxa de variação anual, em percentagem




Fontes: Min. do Plana e Finanças de Timor-Leste e FMI.

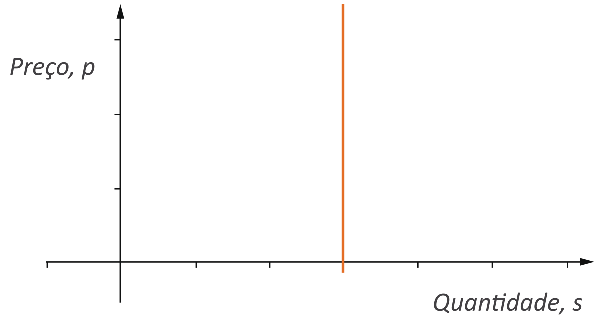
**Definição**

Dada uma função *f* dá-se o nome de ***gráfico de f*** ao conjunto de pares ordenados (*x*, *f(x)*), para qualquer valor de *x* pertencente ao domínio da função.

Nota: Qualquer imagem utilizada para representar o gráfico chama-se **representação gráfica** da função.

**Observação**: Será que todos os gráficos representam funções?

Considera o gráfico da figura ao lado, referente à curva da procura de um determinado bem.




**1.** Que significado tem o gráfico no contexto económico?

*Significa que a procura sobre um determinado bem é independente do preço.*

**2.** O gráfico representa uma função?

*A curva da procura é uma reta paralela ao eixo Oy, pelo que não é um gráfico de uma função. Repara que para a mesma quantidade do bem corresponde vários preços.*

## 1.4 Formas de representar uma função

### 1.4.1. Tabelas numéricas e gráficos

Vamos utilizar a análise simples da oferta e da procura para representar a função que relaciona o preço e quantidade de um determinado bem.

TAREFA **3:**

**1.** A informação da tabela seguinte, refere-se à variação do preço unitário de um *bushel* de trigo em função da quantidade procurada, em milhões de *bushel* (*Bu*).

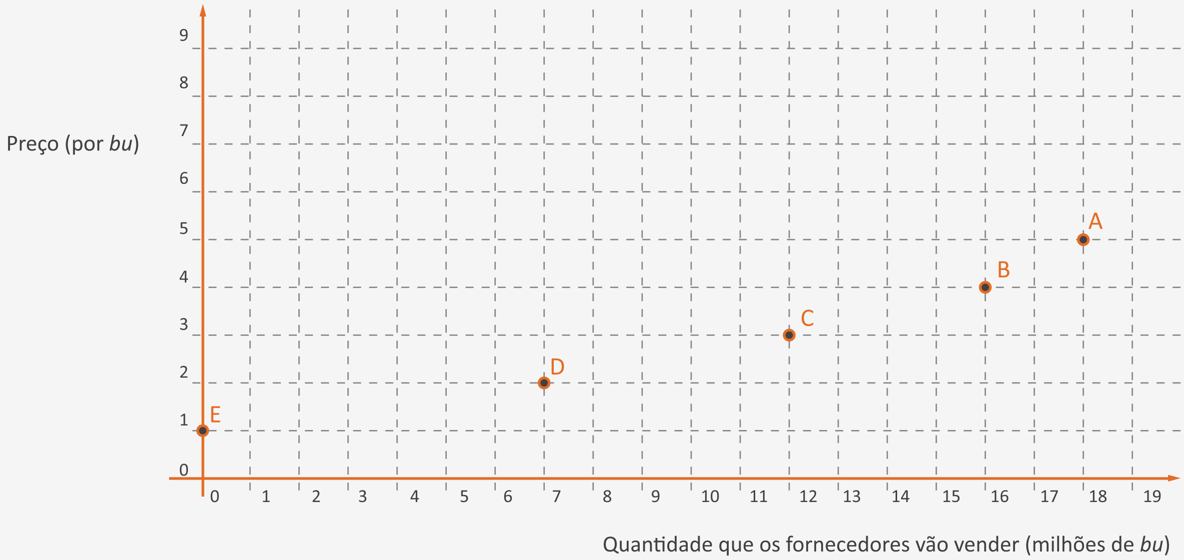
| | Quantidade procurada (Q) ( em milhões de *Bu*) | Preço (P) (*USD*, por *Bu*) |
|---|---|---|
| **A** | 9 | 5 |
| **B** | 10 | 4 |
| **C** | 12 | 3 |
| **D** | 15 | 2 |
| **E** | 20 | 1 |

***Bushel* (*Bu*)** *– representa a unidade de volume em seco (em Portugal equivale ao alqueire)*

**1.1.** Que comentário se pode fazer acerca da evolução do preço por *bushel* de trigo, em função da procura?

**1.2.** Desenha no teu caderno um referencial cartesiano, onde o eixo vertical corresponde ao preço e o eixo horizontal à quantidade de trigo. Assinala no mesmo referencial cartesiano os pontos *A, B, C, D e E*.

**2.** O gráfico da figura seguinte refere-se ao comportamento do preço do trigo em função da quantidade de oferta do trigo.




**2.1** Elabora uma tabela que traduza a informação contida no gráfico anterior.

**3.** Observa o comportamento da oferta e da procura do trigo, tendo em conta as duas questões anteriores.

**3.1.** Encontra um ponto onde o montante que os consumidores desejam comprar é exatamente igual à quantidade que os produtores desejam vender.

**3.2.** Qual é o preço de equilíbrio?

**3.3.** Comenta as seguintes afirmações:

**[I]** A situação em que se vende o trigo a 5 dólares, a produção de trigo poderá subsistir durante algum tempo.

**[II]** A situação onde o preço é 2 dólares, a produção de trigo não se pode manter durante muito tempo, pois o consumo irá exceder a produção.

Repara que a função definida entre o preço de mercado do trigo e a quantidade desse bem foi representada através de uma **tabela numérica** ou através de um **gráfico**.

### 1.4.2. Expressão algébrica

Uma função também pode ser representada por uma expressão algébrica. Consideremos o exemplo resolvido que se segue.

**Exemplo resolvido – definir uma função**

O custo total relativo à produção de *x* unidades de um produto é dado pela soma do custo fixo (seguros, alugueres, eletricidade...) e o custo variável, *c(x)* (que depende de *x*).

A tabela seguinte refere-se ao custo variável de um produto, em função da quantidade produzida.

| Quantidade do produto (em dezenas) | Custo variável (USD) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| ... | ... |
| 100 | 200 |
| ... | ... |

**1.** Qual será o custo variável se produzirem 500 unidades?

*Ora, observando as duas colunas, verificamos por cada dezena de produto o custo variável duplica. Assim, para produzirem 500 unidades, ou seja, 50 dezenas, gastam-se 100 USD.*

**2.** Escreve uma expressão que permita determinar o custo variável da produção em função do número (em dezenas), *x*, de unidades produzidas.

*Seja x o número de dezenas de unidades produzidas. Pela regra enunciada na resolução do item 1, podemos estabelecer a expressão c(x) = 2 x.*

**3.** Sabendo que o custo fixo é 40 dólares, determina a quantidade do produto que foi produzida, sabendo que o custo total de produção foi de 1720 USD

*De acordo com o enunciado, o custo total relativo à produção de um determinado produto é igual à soma do custo fixo com o custo variável. Assim, dado que o custo total de produção é 1720 dólares e o custo fixo é 40 dólares, então o custo variável é 1720 – 40 = 1680 (USD). Portanto, de acordo com o item 2, o número de dezenas é dado por 1680 : 2 = 840 (dezenas).*

**4.** Determina c(3) e interpreta o valor obtido.

*c(3)= 2 x 3 = 6. Significa que o custo com a produção de 3 dezenas de unidades do produto é 6 USD.*

**5.** Sabe-se que o custo fixo com a produção de x dezenas de produto é 50 USD. Escreve a expressão que traduz o custo total da produção.

*Seja t(x) o custo total com a produção de x dezenas.*

*De acordo com o enunciado, tem-se, t(x)= 50 + c(x), ou seja, t(x) = 50 + 2x.*

*Em síntese, uma função poderá ser definida por um **diagrama sagital**, por uma **tabela numérica**, por um **gráfico** ou por uma **expressão algébrica**.*

## 1.5 Generalidades sobre funções

### Situação 3

**1.** O gráfico representado na figura ao lado refere-se ao comportamento da taxa de inflação em Timor-Leste de 2008 a 2010.

**1.1** Em que mês do ano de 2008 a taxa de inflação foi nula?

**1.2** Em que meses do ano de 2008 é que a taxa de inflação foi negativa?

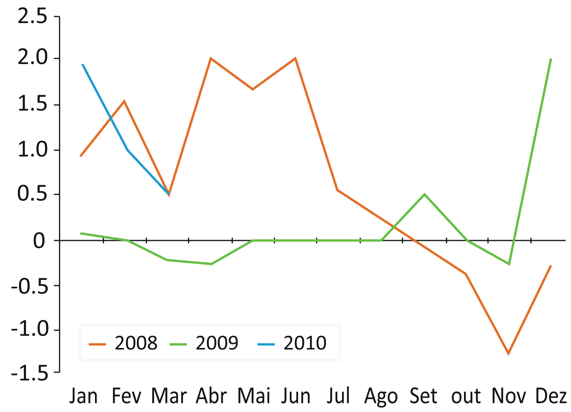
**1.3** Entre que meses do ano de 2009 a taxa de inflação foi positiva?

**1.4** Qual foi o valor máximo da inflação atingido no ano de 2008? Em que altura do ano?

**1.5** Qual foi o valor mínimo da inflação no primeiro semestre do ano de 2008?

**1.6** O que se pode afirmar acerca da taxa de variação mensal da inflação no ano de 2010?

INFLAÇÃO (2008 - 2010)
Taxa de variação mensal, em percentagem




Fontes: Min. Do Plano e Finanças de Timor-Leste e FMI

**Soluções – Situação 3**

1.1 Mês de agosto

1.2 De agosto a dezembro.

1.3 Do início do ano até ao meio do mês de janeiro, de meio de julho a meio de setembro.

1.4 Cerca de 2%, atingida na primeira quinzena do mês de março e na primeira quinzena do mês de maio.

1.5 Próximo de 0,5%.

1.6 O comportamento da taxa de inflação tem apresentado uma trajetória decrescente.

### 1.5.1 Zeros de uma função

Na tarefa 3, pudeste verificar que em agosto de 2008 a taxa de inflação foi nula. Também, relativamente ao ano de 2009, a taxa de inflação é nula a partir da 1.ª quinzena de Abril até à 1.ª quinzena de julho.

**Definição**

Dada uma função f de domínio D, os zeros de f são os elementos de D que têm imagem nula. Simbolicamente:

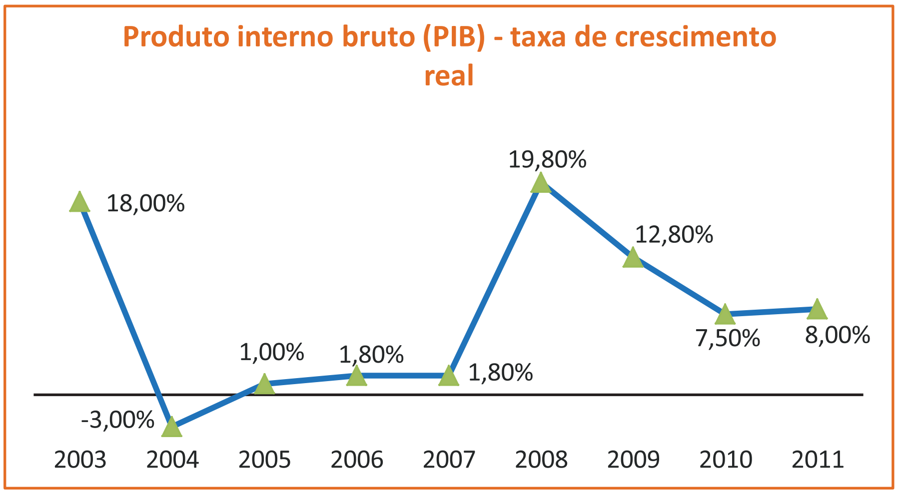
*Seja $x \in D$. x é zero da função f se e só se f(x)=0.*

### 1.5.2 Sentido da variação de uma função. Monotonia de uma função

Dado o gráfico de uma função, é possível analisar o seu sentido de variação, isto é, indicar intervalos de maior amplitude possível onde a função é decrescente, crescente ou constante.

### Exemplo resolvido – O PIB

Na figura seguinte está representado um gráfico relativo à evolução do PIB de 2003 a 2011. Designemos por *f* a função representada pelo gráfico.




Fontes: http://www.indexmundi.com/pt/timorleste (consultado em Maio 2011)

**1.** Faz um pequeno comentário acerca da evolução do PIB de 2003 a 2011.

*A evolução do PIB entre os anos de 2003 e 2011 pode ser feita, por observação do gráfico anterior, através de uma descrição do tipo:*

- *De 2003 a 2004 a taxa diminui, passando de 18,00% para -3,00%.*
- *De 2004 a 2008 a taxa aumentou, passando de -3,00% para 19,80%.*
- *De 2008 a 2010 a taxa diminuiu, passando de 19,80% para 7,50%.*
- *De 2010 a 2011 a taxa aumentou 0,50%.*

Relativamente à função *f*, podemos escrever o seguinte:

- *A função f é **estritamente crescente** nos intervalos [2004, 2008] e em [2010, 2011].*
- *A função f é **estritamente decrescente** nos intervalos [2003, 2004] e em [2008, 2010].*
- *A função f é **constante** no intervalo [2006, 2007].*

No geral,

Considerando *A* um subconjunto do domínio da função *f*, tem-se:

- *Uma função f é **estritamente crescente** em A se e só se para todos os números reais a e b pertencentes A, se a<b, então f(a) < f(b).*
- *Uma função f é **estritamente decrescente** em A se e só se para todos os números reais a e b de A, se a<b, então f(a) > f(b).*
- *Uma função f é **constante** em A se e só se para todos os números reais a e b de A, f(a)=f(b).*

### 1.5.3. Extremos absolutos e extremos relativos de uma função

Considerando o gráfico do exemplo resolvido o ***PIB***, pode-se acrescentar a seguinte informação:

- *O ano onde se verificou a taxa de crescimento mínima foi 2004. Atingindo - 3,00%.*
- *A taxa máxima foi atingida no ano de 2008, tomando o valor de 19,8%.*
- *A partir do ano de 2008 a taxa de crescimento atingiu um valor mínimo de 7,5%, no ano de 2010.*

No geral, dada uma função *f* de domínio $D_f$, diz-se que:

- $f$ tem um **máximo absoluto** em ***a*** se para todo $x \in D_f$ , $f(x) \leq f(a)$.

A ***a*** chama-se **maximizante** e a *f(a)* chama-se **máximo absoluto**.

No exemplo anterior, 2008 é o maximizante e 19,80% é o máximo absoluto.

- $f$ tem um **mínimo absoluto** em ***a*** se para todo $x \in D_f$ , $f(x) \geq f(a)$.

A ***a*** chama-se **minimizante** e a *f(a)* chama-se **mínimo absoluto**.

No exemplo anterior, 2004 é o minimizante e -3,00 % é o mínimo absoluto.

- $f$ tem um **máximo relativo** em ***a*** se existir um intervalo aberto *I* contendo ***a***, tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in D_f \cap I$.

A ***a*** chama-se **maximizante** e a *f(a)* chama-se **máximo relativo**.

No exemplo anterior, 2003 é um maximizante e 18,00% é um máximo relativo.

**Nota**

1,8% é também considerado um máximo relativo da função, para o intervalo de tempo [2006, 2007].

- $f$ tem um **mínimo relativo** em a se existir um intervalo aberto *I* contendo a, tal que $f(x) \geq f(a)$, para todo $x \in D_f \cap I$.

A ***a*** chama-se **minimizante** e a *f(a)* chama-se **mínimo relativo**.

No exemplo anterior, 2010 é um minimizante e 7,50% é um mínimo relativo.

**Nota**

1,8% é também considerado um mínimo relativo da função, para o intervalo de tempo [2006, 2007].

Para melhor identificar os extremos de uma função pode-se elaborar um quadro de variação da função. Neste tipo de quadro são utilizadas "setas" que induzem o comportamento da função:

- no caso da função ser crescente, utiliza-se $\nearrow$

- no caso da função ser decrescente, utiliza-se $\searrow$

- no caso da função ser constante, utiliza-se $\rightarrow$

Observando o gráfico considerado no exemplo resolvido, “*O PIB*”, pode-se elaborar o seguinte quadro de variação:

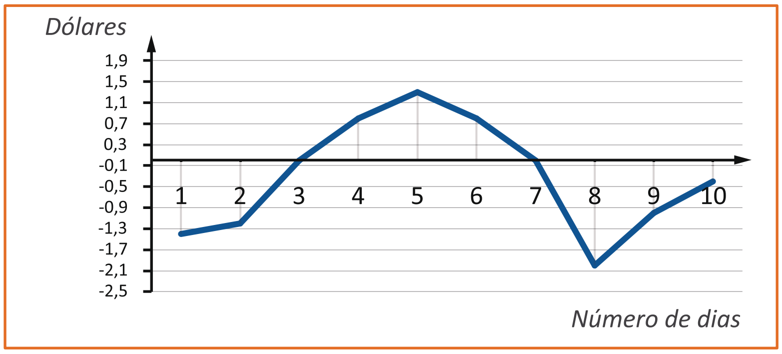
| *Ano* | 2003 | | 2004 | | 2006 | | 2007 | | 2008 | | 2010 | | 2011 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *P (%)* | 18 % | ↘ | -3% | ↗ | 1,8% | → | 1,8% | ↗ | 19,8 | ↘ | 7,5 | ↗ | 8 |

Observa que a partir da tabela, é muito fácil indicar os extremos da função.

### 1.5.4 Estudo do sinal

**Exemplo resolvido – As ações**

O gráfico da função representado na figura ao lado representa a variação do valor das ações de uma empresa, nos primeiros 10 dias de um determinado mês.




**1.** Indica:

**1.1.** Os zeros da função e interpreta o seu significado no contexto apresentado.

*Os zeros são 3 e 7. No contexto da situação, significa que no 3.º dia e 7.º dia do mês a cotação das ações era 0 USD.*

**1.2.** A imagem de 4.

*A imagem de 4 é 0,7.*

**2.** Constrói um quadro que elucide a variação do sinal da função *f* , e indica os intervalos onde a função é positiva e negativa.

*Considerando o domínio da função e os seus zeros, podemos estabelecer o seguinte quadro sobre a variação do sinal:*

| *Dia (x)* | *1* | | *3* | | *7* | | *10* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | *-1,4* | *-* | *0* | *+* | *0* | *-* | *- 0,4* |

Em conclusão,

*- a função f é **negativa** nos intervalos [1, 3[ e ]7, 10].*

*- a função f é **positiva** no intervalo ]3, 7[.*

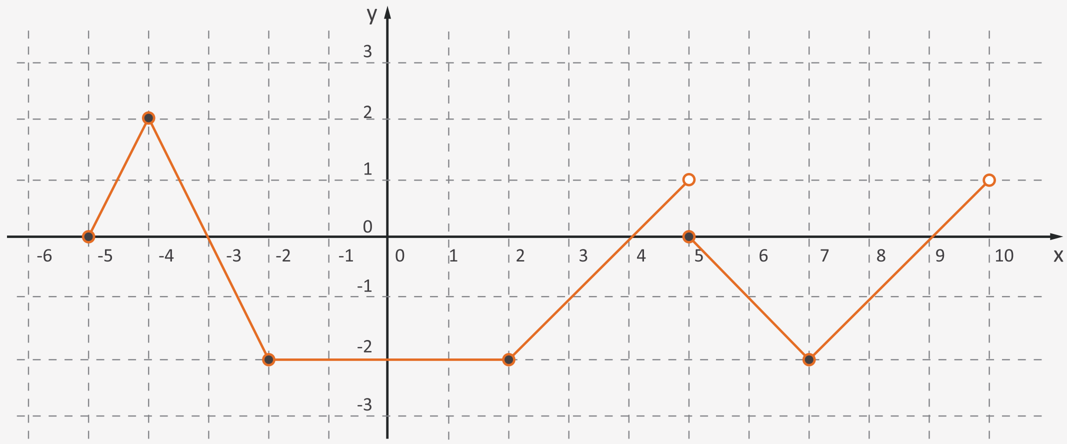
No geral,

dada uma função *f* de domínio *D* e *I* um subconjunto de *D*, diz-se que:

- ***f é positiva em I*** *se e só se f(x)>0, qualquer que seja* $x \in I$.
- ***f é negativa em I*** *se e só se f(x)<0, qualquer que seja* $x \in I$.

TAREFA **4:**

Na figura seguinte encontra-se representado o gráfico de uma função *g*.




**1.** Indica:

**1.1** O domínio e o contradomínio da função.

**1.2** Os zeros da função.

**1.3** Os extremos da função (absolutos e relativos).

**2.** Estuda a monotonia da função, isto é, indica os intervalos onde a função é crescente, decrescente ou constante.

**3.** Elabora o quadro de sinal da função e indica os intervalos onde a função é positiva e negativa.

**4.** Determina os valores de $x$ tais que $g(x)= - 2$.

**5.** Intuitivamente, uma função diz-se **contínua** quando conseguimos traçar o seu gráfico sem nunca levantar o lápis do papel. O que podes afirmar acerca da continuidade da função *g*?

## 1.6 Função Polinomial

Na maior parte dos casos analisados até agora, as funções descrevem fenómenos em contexto económico. Todavia, as funções onde a variável independente toma valores reais e o conjunto de chegada é *IR* têm um interesse particular: são designadas por **funções reais de variável real** (f.r.v.r.).

**Definição**

Chama-se **função real de variável real** (f.r.v.r.) a toda a correspondência que a cada elemento de um subconjunto *A* de *IR* faz corresponder um e um só número real.

Em Economia utiliza-se frequentemente polinómios para representar determinadas funções (por exemplo a função custo variável, a função da procura e da oferta de um bem, a função custo total, a função receita, a função lucro, entre outras).

**Recorda**

**Monómio** numa variável é um número real ou produto de um número real por uma potência de uma variável em que o expoente é um número inteiro não negativo.

Por exemplo, $x^2$ , $3a^5$

**Polinómio** é soma de vários monómios não semelhantes (ou seja monómios que não tem a mesma parte literal), designados por termos do polinómio.

Por exemplo, $-3x^3+2x^2-3x$ é um polinómio e $-3x^3$, $2x^2$ e $-3x$ são termos do polinómio.

No exemplo resolvido "*definir uma função*" a função custo variável foi definida pela expressão 2x. No item 5, do mesmo exemplo, a função custo total foi definida por 2x+50. Estes dois casos são exemplos de funções polinomiais.

**Definição**

Uma **função polinomial** *f* é uma função de domínio *IR*, definida da forma

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, em que $a_n, \ a_{n-1}, \dots, a_1, \ a_0$ são números reais, $a_0 \neq 0$ e *n* um número inteiro não negativo.

O valor de *n* é o **grau** da função.

Na família das funções polinomiais, alguns casos particulares tem uma importância de relevo nos contextos económicos.

**Exemplo resolvido** – *custo de produção*

Revisitemos o exemplo resolvido "*definir uma função*".

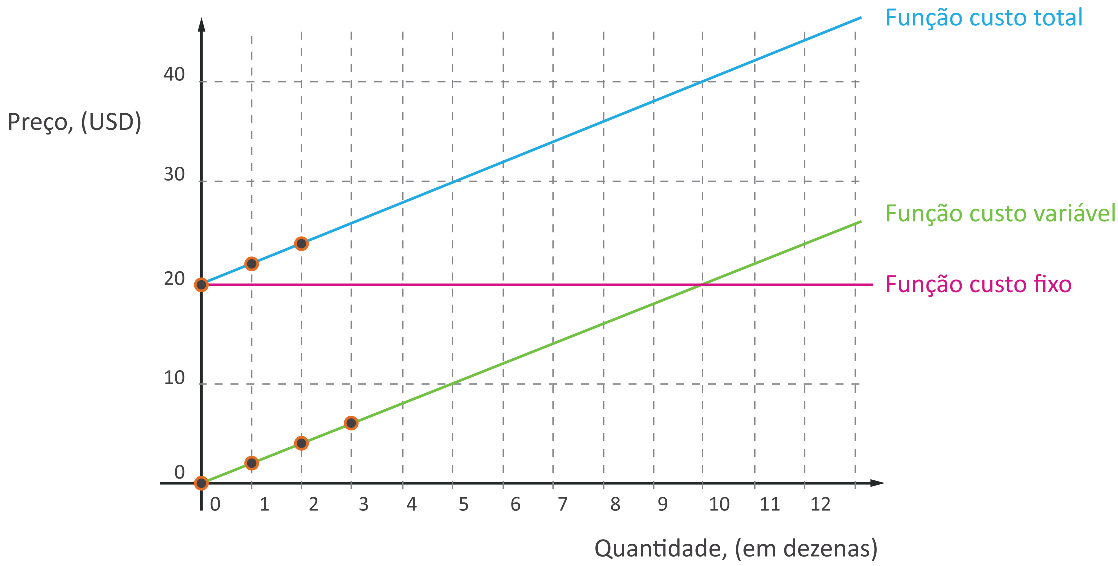
Analisemos agora a tabela que se segue, a qual resume o custo total com a produção de *x* dezenas de um determinado produto.

| Quantidade do produto, em dezenas (*x*) | Custo variável (dólares) | Custo fixo (dólares) | Custo total (dólares) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 20 | 20 |
| 1 | 2 | 20 | 22 |
| 2 | 4 | 20 | 24 |
| ... | ... | ... | ... |
| 100 | 200 | 20 | 220 |
| ... | ... | ... | ... |

**1.** Determina a expressão algébrica que define a função do custo total de produção.

*y = 20 + 2x.*

**2.** Representa num mesmo referencial, a função custo fixo , a função custo variável e a função custo total.




No item 2 do exemplo anterior, os gráficos das funções estão contidos em retas. As expressões algébricas que as definem são:

- *Função do custo fixo: y = 20. Diz-se função constante.*
- *Função do custo variável: y = 2 x. Diz-se função linear.*
- *Função do custo total: y = 2x + 20. Diz-se função afim.*

As funções referidas no exemplo anterior são funções polinomiais de grau 1 que têm nomes específicos.

### 1.6.1 Função afim

**Definição**

Uma **função afim** é definida por uma expressão do tipo $y=mx+b$, sendo $m$ e $b$ números reais.

O gráfico de uma função afim está contido numa reta não vertical.

**Casos particulares**

- Se $m=0$, então $y=b$, diz-se que a **função é constante**. O seu gráfico está contido numa reta horizontal (paralela ao eixo $Ox$).
- Se $b=0$ e $m\neq0$, então $y=mx$ diz-se que a **função é linear**. O seu gráfico está contido numa reta não vertical que contém a origem do referencial.

Na unidade temática anterior analisaste situações de proporcionalidade direta e definiste expressões algébricas do tipo $y = kx$, $k \neq 0$, sendo $k$ a constante de proporcionalidade direta. Esta expressão algébrica traduz exemplos de funções lineares.

**Proposta de trabalho de grupo** – *estudo da função afim*

Seja $f$ uma função real de variável real definida por

$f(x) = m\,x + b$ , $m, b \in IR$.

Atribui valores distintos a $m$ $(m > 0, m < 0$ e $m = 0)$ e a $b$ e elabora um quadro de síntese onde realces aspetos relevantes da função afim, tais como:

- domínio e contradomínio;
- zeros;
- análise gráfica;
- monotonia e variação do sinal.

**Nota:** *sempre que possível, este trabalho de grupo poderá ser potenciado recorrendo à calculadora gráfica ou ao computador.*

### Modelo analítico da função afim

Como pudeste verificar, o gráfico de uma função afim está contido numa reta, não vertical.

Quantos pontos são necessários para definir uma reta?

*Dois dos seus pontos. Assim, para obter o gráfico de uma função afim basta conhecer dois pontos do gráfico que a representa.*

Para obter o modelo analítico de uma função afim também é suficiente conhecer as coordenadas de dois pontos do gráfico da função.

Sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ dois pontos que pertencem à reta e *P(x, y)* um ponto genérico da reta.

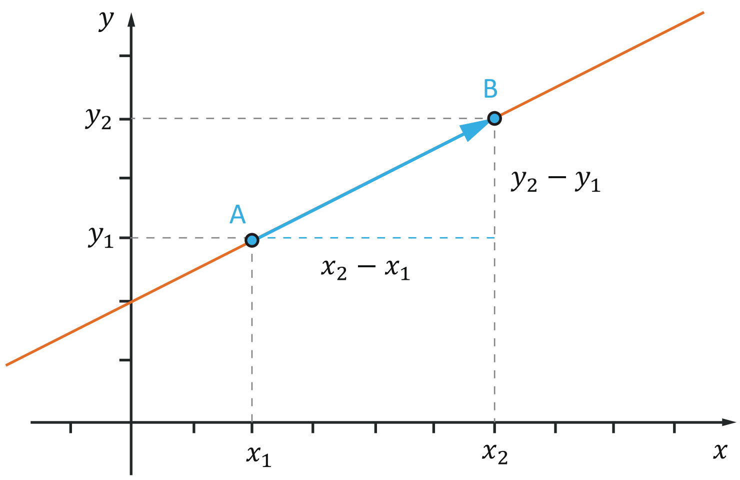
Para determinar a equação da reta, procede-se do seguinte modo:

**1.** Determina-se o **declive** da reta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**2.** Utiliza-se a fórmula,

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$




Se m > 0, a função é crescente
Se m < 0, a função é decrescente
Se m = 0, a função é constante

Desta forma, obtém-se a expressão *y=mx+b*, com *m* e *b* números reais, à qual se chama a **equação reduzida da reta**.

A *m* chama-se declive da reta (ou coeficiente diretor da reta) e a *b* ordenada na origem (imagem de zero). Observa que retas com o mesmo declive são paralelas.

### Exemplo resolvido – *Modelo analítico de uma função afim.*

Seja *f* uma função afim. Define a função *f* por uma expressão algébrica do tipo *y=mx+b*, sabendo que os pontos *A* (1, 2) e *B* (-3, 4) pertencem ao gráfico da função *f*.

- Determinemos o declive da reta que representa graficamente a função:

$$m = \frac{4-2}{-3-1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

- Determinemos o modelo analítico:

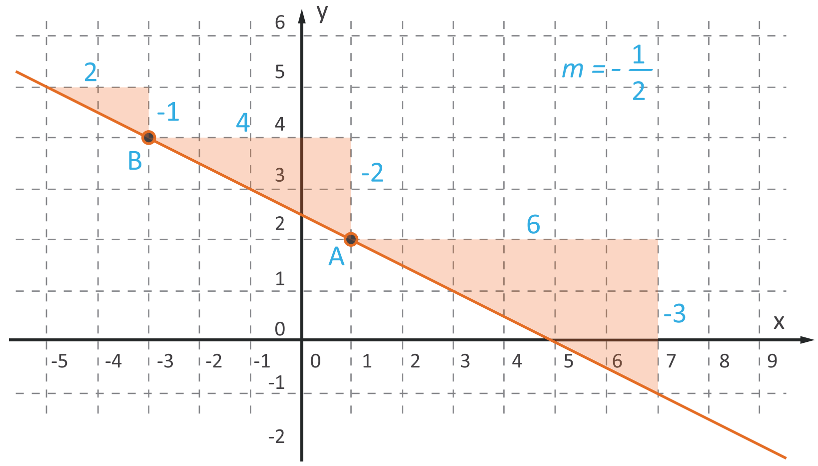
$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 2$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Portanto, $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.




TAREFA 5:

*Para a resolução dos itens que se seguem, assume que, a nível gráfico, uma reta representa satisfatoriamente as curvas da oferta e da procura de um determinado bem.*

**1.** Num determinado período de tempo, estão disponíveis no mercado 500 relógios de uma determinada marca se o preço for de 50 USD. Caso o preço seja de 75 USD, estão disponíveis 1 000 relógios. Determina a expressão que traduz a lei da oferta dos relógios neste período.

**2.** Numa banca registou-se o seguinte: quando o preço de cada coco era de 4 USD não se vendeu qualquer coco. Quando eram gratuitos, foram procurados 100 cocos. Escreve a expressão que traduz a procura.

**3.** Sendo considerado um bem essencial para a população, o estado deliberou que o preço do leite seria 1,25 USD durante o próximo ano.

**3.1** Nesse período de tempo, determina a expressão da função que traduz a lei da procura.

**3.2** Como se designa esta função?

**4.** Um governo decidiu comprar anualmente 30 geradores, independentemente do seu preço.

**4.1** Escreve a equação da reta que representa graficamente a lei da procura dos geradores e interpreta o seu significado no contexto económico.

**4.2** Qual é o declive da reta?

**5.** Na figura seguinte estão representadas duas tabelas que traduzem a informação relativa à procura e oferta de sacos de café.

| Quantidade procurada | Preço (por saco, em USD) |
|---|---|
| 10 | 3,25 |
| 40 | 2,5 |
| 100 | 1 |

| Quantidade de oferta | Preço (por saco, em USD) |
|---|---|
| 10 | 0,25 |
| 60 | 1,5 |
| 90 | 1,8 |

**5.1** Escreve a expressão de cada uma das retas que representa graficamente a oferta e a procura do café.

**5.2** Determina analiticamente o ponto de equilíbrio e interpreta o seu resultado no contexto do problema.

**5.3** Se a quantidade oferecida aumentar em 20 unidades, para cada nível de preço, carateriza o ponto de equilíbrio e interpreta-o?

### 1.6.2 Função quadrática

Nem sempre na análise económica se recorre a funções afim. Em certos casos, é necessário recorrer a funções do 2.º grau, designadas por funções quadráticas. Estas revestem-se de grande importância na modelação de certos fenómenos que nos rodeiam.

**Definição**

Uma **função quadrática** é uma função $f$ de domínio *IR*, definida da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a, b$ e $c$ são números reais, sendo $a \neq 0$.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

No estudo da função quadrática é importante saber determinar os seus zeros assim como determinar o vértice da parábola que a representa graficamente.

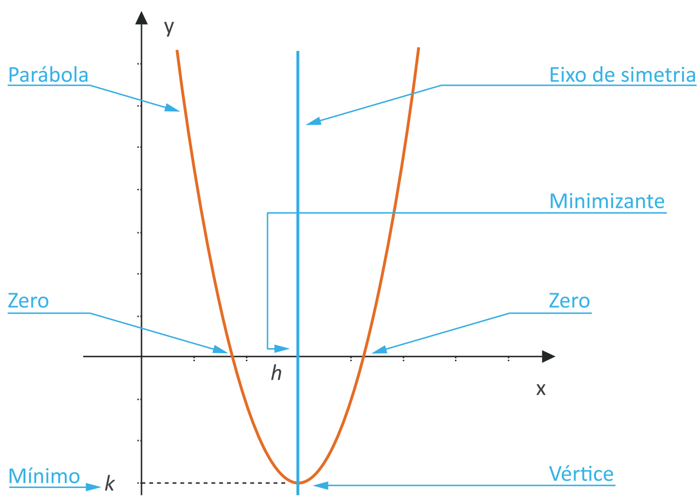
**Informação complementar**

Do ponto de vista geométrico, parábola é um conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz) que não contém esse ponto.

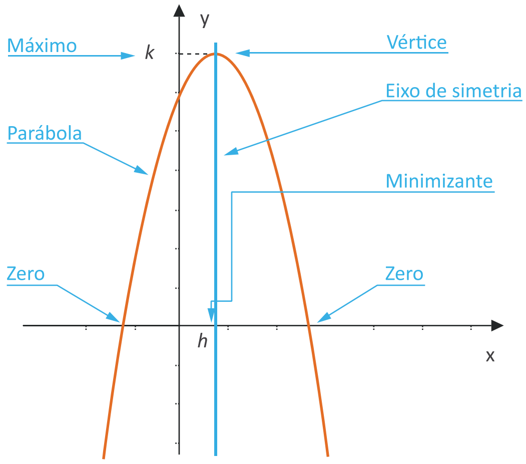
## Sentido da concavidade do gráfico de uma função quadrática

Dada uma função quadrática definida por $y = ax^2 + bx + c$, com $a, b$ e $c$ números reais, com $a \neq 0$, é possível indicar o sentido da concavidade do seu gráfico.

- Se **a > 0**, a concavidade da parábola está voltada para cima.



- Se **a < 0**, a concavidade da parábola está voltada para cima.




## Vértice do gráfico de uma função quadrática

Dada uma função $f$ definida em *IR* por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a, b$ e $c$ números reais, e $a \neq 0$, é sempre possível escrevê-la na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$. As coordenadas do vértice da parábola são *V (h, k)*.

Observa: $f(x) = ax^2 + bx + c =$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

***a*** é um número real não nulo

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$= a(x-h)^2 + k \text{, sendo } h = -\frac{b}{2a} \text{ e } k = \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Desta forma, tem-se que a abcissa do vértice é $-\frac{b}{2a}$ e a ordenada é $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. O eixo de simetria da parábola é sempre a reta de equação $x = -\frac{b}{2a}$.

**Observação:**

Na prática, podem usar-se outros processos para determinar, sem recorrer à calculadora, o vértice da parábola e, consequentemente, os extremos da função definida por esse gráfico.

**Exemplo resolvido** – *determinar os extremos de uma função quadrática*

**1.** Considera a função *g* definida por $g(x) = -3x^2 + 6x + 2$.

**1.1** indica o sentido da concavidade da parábola que representa o gráfio da função *g*.

*Observando a expressão que define a função, conclui-se que a = - 3 (<0) pelo que a concavidade da parábola é voltada para baixo.*

**1.2** Determina as coordenadas do vértice da parábola representativa da função *g* e indica o extremo da função.

*Determinemos as coordenadas do vértice da parábola utilizando três processos.*

***Processo 1***

*Dado que a = -3, b = 6 e c = 2, então:*

$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\times(-3)} = 1$ *e* $k = f(1) = -3\times1^2 + 6\times1 + 2 = 5$. Portanto, o vértice da parábola tem de coordenadas *(1, 5)*.

***Processo 2***

*Transforma-se a expressão que define a função numa expressão do tipo* $f(x) = a(x-h)^2 + k$.

*Assim,*

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^2 + 6x + 2 = \\ &= -3(x^2 + 2x) + 2 \\ &= -3(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 2 \\ &= -3(x^2 - 2x + 1) + 3 + 2 \\ &= -3(x-1)^2 + 5 \end{aligned}$$

*Portanto, conlui-se também que as coordenadas do vértice são V (1,5).*

***Processo 3***

*Resolvamos a equação* $f(x) = f(0)$*. Nota que as soluções desta equação são abcissas de pontos da parábola simétricos relativamente ao eixo de simetria.*

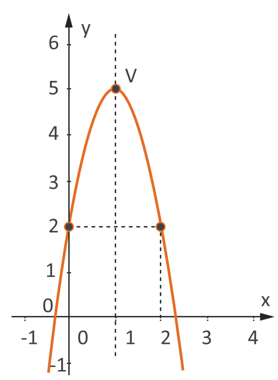
*Observação:*
*f(0) = c. Existe sempre um ponto de interseção do gráfico da função quadrática com o eixo das ordenadas. As coordenadas do ponto de interseção são (0, c).*

*Assim,*

$f(x) = f(0) \Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 2 = 2 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$

*Assim, a abcissa do vértice é igual a metade de 2, ou seja, 1. Consequentemente, a ordenada do vértice é f(1)=5 V (1,5).*

*Concluindo, 5 é o máximo absoluto da função g quando x é igual a 1.*



representação gráfica de *f*

## Zeros da função quadrática. Binómio discriminante

As abcissas dos pontos de ordenada nula, caso existam, são os zeros da função. O seu conhecimento tem bastante interesse na resolução de vários problemas em contexto real.

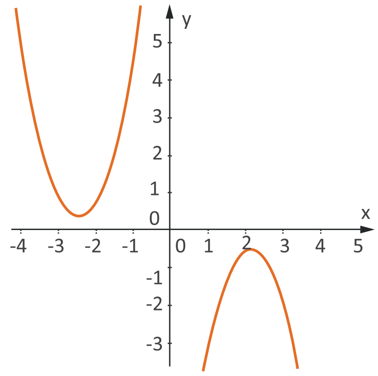
Determinar os zeros de uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ é o mesmo que resolver uma equação do segundo grau, $ax^2 + bx + c = 0$ , $a \neq 0$. Assim, tal como foi referido na unidade anterior, pode-se usar a fórmula resolvente.

**Fórmula resolvente:**

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Uma função quadrática pode ter **no máximo dois zeros**.

Repara que o número de soluções da equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, depende do sinal da expressão $b^2 - 4ac$ a que se dá nome de **binómio discriminante** e pode notar-se por Δ (letra grega que se lê "delta").




Assim,

- Se Δ > 0, há dois zeros.
- Se Δ < 0, não há zeros.
- Se Δ = 0, há um zero.

**Proposta de trabalho de grupo** – *Função quadrática e sua representação gráfica*

**1.** Seja *f* uma função real de variável real definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com *a,b* e *c* números reais, e $a \neq 0$.

Efetua uma análise sobre a monotonia e o contradomínio de de uma função quadrática.

**2.** Considera a função *f* dada pela expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$.

Analisa a alteração dos parâmetros *a, h* e *k* e suas consequências no gráfico da função, tendo em consideração os seguintes pontos de discussão:

- Qual a influência do parâmetro *a* na representação gráfica da função?
- Qual a influência do parâmetro *k* na representação gráfica da função?
- Qual a influência do parâmetro *h* na representação gráfica da função?
- Indica os valores para os parâmetros *a, h* e *k*, tais que:

- a função tenha dois zeros distintos;

- a função tenha dois zeros distintos e a parábola que a representa graficamente tenha a concavidade voltada para cima;

- a função não tenha zeros e a parábola que a representa graficamente tenha a concavidade voltada para baixo;

- a função tenha um único zero.

**Nota:** sempre que possível, este trabalho de grupo poderá ser potenciado recorrendo à calculadora gráfica ou ao computador.

**Observação:**

O conhecimento dos zeros, caso existam, de uma função quadrática tem um papel fundamental para a determinação das coordenadas do vértice da parábola que representa a função.

*Por exemplo,*

Os zeros da função *f* definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3$ são -1 e 3 (confirma!).

Seja V(*h, k*) o vértice da parábola. Atendendo a que a parábola é simétrica em relação à reta de equação *x = h*, então, $h = \frac{-1+3}{2} = 1$.

Uma vez conhecido a abcissa do vértice, basta determinar *f(1)* para encontrar a ordenada. Assim, *V*= (1, -4). Observa que mediante os dados que dispomos assim devemos escolher o melhor processo.

TAREFA **6:**

**1.** Considera a função *h*, de domínio *IR*, definida por

$$h(x) = -x^2 - 4x - 5$$

**1.1** Mostra que $h(x) = -(x+2)^2 - 1$.

**1.2** Escreve a equação do eixo de simetria da parábola que representa graficamente a função *h*.

**1.3** Indica o contradomínio de *h* e os intervalos onde a função é crescente e decrescente.

**1.4** A função tem zeros? Justifica a tua resposta.

**1.5** Determina os valores de *x* tais que $h(x) + 2 = 0$.

**2.** A formação da receita proveniente do volume de vendas pode ser entendida como o produto entre o preço de venda *p* e a quantidade vendida, *x*.

**2.1** Caso o preço seja constante, que tipo de função poderá definir a função receita?

**2.2** Sob certas condições, normalmente, o preço unitário, *p*, de um determinado bem varia com a quantidade que é procurada pelo consumidor. Assim, *p* poderá ser expresso em função da procura, isto é, *p=f(x)*, sendo *f* a função que representa algebricamente a curva da procura e *x* a quantidade de produto procurada.

**a)** Exprime a função receita através da função da procura, relativa à produção de x unidades de produto.

**b)** Considera que a lei da procura pode ser modelada pela função definida por $f(x) = -x + 18$.

Indica a expressão que traduz a receita relativa à produção de *x* unidades de um mesmo produto (considerando $0 \leq x \leq 18$). Em seguida, determina a quantidade de produto de modo a que a receita seja máxima.

**c)** A função *C* definida por *C(x)= 2x+39* representa o custo total com a produção de *x* unidades de um determinado produto.

**i)** Representa, num mesmo referencial, as funções da receita e do custo total, relativas à produção de *x* unidades de um mesmo produto, sendo $0 \leq x \leq 18$.

**ii)** A função que traduz o lucro obtido com a produção de *x* unidades de um produto é dada pela diferença entre a função da receita obtida e a função do custo total.

Pela observação da representação obtida na alínea anterior, indica:

- os valores de *x* para os quais o lucro é nulo.
- o intervalo onde existe lucro;
- o intervalo onde existe prejuízo.

**iii)** Escreve a expressão que traduz o lucro. Em seguida, confirma as respostas dadas na alínea anterior e determina o lucro máximo, usando processos exclusivamente analíticos.

## 1.7 Função Exponencial

A função exponencial reveste-se de grande importância para a compreensão e justificação de muitos fenómenos naturais. Esta é utilizada, por exemplo, no estudo de gerações de populações poderá servir de base à análise do seu comportamento.

Vejamos um exemplo prático para evidenciar a utilidade da função exponencial.

*A Maria e o Paulo formam um casal. Em certo dia decidiram elaborar uma árvore genealógica, determinando o número de avós e bisavós que têm em conjunto.*

Facilmente chegariam ao resultado, procedendo da seguinte forma:

1.ª geração - Maria e Paulo: $2 = 2^1$

2.ª geração - Pais: $2 + 2 = 4 = 2^2$;

3.ª geração - Avôs e Avós: $4 + 4 = 8 = 2^3$

4.ª geração - Bisavôs e Bisavós: $8 + 8 = 16 = 2^4$.

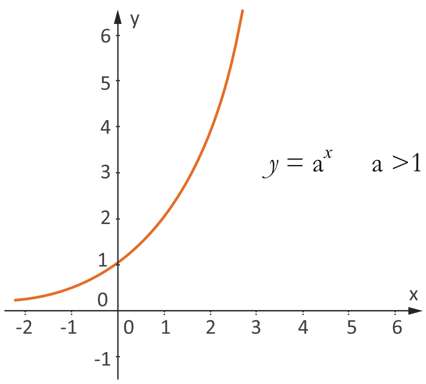
*Para cada geração seguinte, o número de pessoas duplica. Caso se pretendesse determinar o número de Trisavôs e Trisavós do casal, bastava determinar o valor de $2^5$, ou seja, 32.*

Generalizando, notamos que para uma dada geração *x*, o número de ascendentes é dado pela função definida pela expressão $y = 2^x$. A função *f* definida por $f(x) = 2^x$ é um caso particular da função exponencial.

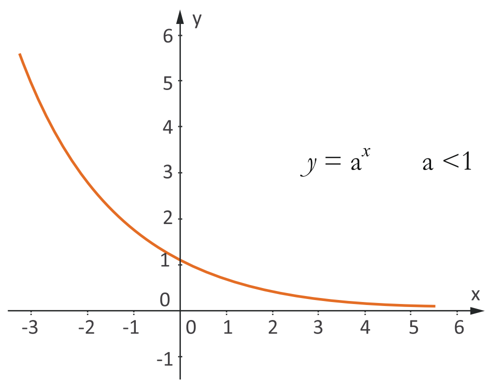
Definição

Uma função exponencial é uma função *f* real de variável real, definida da forma $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Graficamente, tem-se:




*Função estritamente crescente;*
*Domínio: IR*
*Contradomínio: IR+*
*A função não tem zeros*




*Função estritamente decrescente;*
*Domínio: IR*
*Contradomínio: IR+*
*A função não tem zeros*

*Repara que se a=1, $a^x$=1,para todo o número real x. Desta forma, era uma função constante.*

A função definada pela expressão $y=e^x$ é um caso particular da função exponencial. Esta tem grande interesse na descrição de vários fenómenos naturais e evolutivos. É o que se passa, por exemplo, na capitalização de juros (Economia), no crescimento de uma população (Biologia) ou na desintegração radioativa (Química).

O **número de Neper**, cuja descoberta se atribui a John Napier, representa-se por ***e*** é um número irracional, isto é, é uma dízima infinita não periódica.
e = 2,718281828 …
Este número é interpretado como limite da sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

**Exemplo resolvido** – *Número de Neper e os juros compostos*

**1.** Considera que se depositava num banco 1 USD à taxa anual de 100%.

**1.1** Supondo o a capitalização anual, quanto é que se tinha no final do primeiro ano?

*Sendo as capitalizações anuais, no final do primeiro ano, ter-se-ia 1 + 1 x 1 = 2 (USD), ou seja, mais 100% do que se depositou.*

**1.2** Para cada uma das seguintes capitalizações, determina o dinheiro que se teria no final do 1.º ano:

**a)** Capitalização semestral;

*Neste caso, o dinheiro investido, 1 USD, vai capitalizar duas vezes em cada ano.*

*Assim, sendo n o número de semestres, o fator pelo qual se multiplica o capital investido é* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. *Portanto, no final de um ano, ter-se-ia* $1\times\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2{,}25$ *USD.*

**b)** Capitalização mensal

*De forma análoga, o fator pelo qual se multiplica o capital investido é* $\left(1+\frac{1}{12}\right)^n$. *Portanto, no final do ano, ter-se-ia* $1\times\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}\approx 2{,}611304$.

**c)** Capitalização à hora

*Do mesmo, se conclui que neste caso o dinheiro vai capitalizar em cada ano 8760 vezes. Assim, o fator pelo qual se multiplica o capital investido é* $\left(1+\frac{1}{8760}\right)^n$. *Portanto, no final do ano, ter-se-ia* $\left(1+\frac{1}{8760}\right)^{8760}\approx 2{,}71812$.

**d)** O que se pode concluir?

*O capital obtido cada vez é maior…no entanto tem um limite. Se dividíssemos um ano em n partes, fazendo n tender para números suficientes grandes (ou seja, tender para o infinito), ter-se-ia que* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *tendia para **e**.*

*Em conclusão, com 1 USD nunca se poderia obter, no final do ano, 3 USD.*

TAREFA **7:**

**1.** Num banco foram depositados 100 000 *USD* a uma taxa anual de 3%.

Calcule o capital acumulado ao fim de 4 anos com capitalizações:

**1.1** Semestrais

**1.2** Mensais

**2.** O Domingos tem 5000 *USD* e pretende aplicá-los num depósito a prazo onde a taxa de juro é de 6%, em regime de capitalização composta.

Determina o capital acumulado ao fim de:

**2.1** Um ano;

**2.2** Três anos

**2.3** 10 anos

## 1.8 Função Racional

Já reparaste que as funções podem traduzir situações reais provenientes de diversas áreas de conhecimento. Continuando esse estudo, vamos centrar a nossa atenção numa nova família de funções onde pertence a função de proporcionalidade inversa.

## Recorda

Duas grandezas $x$ e $y$ são **inversamente proporcionais** quando o produto de dois quaisquer valores correspondentes é constante e diferente de zero.

Simbolicamente, $xy=k$, com $k$ diferente de zero.

$k$ é a constante de proporcionalidade inversa.

As funções de proporcionalidade inversa relacionam grandezas inversamente proporcionais. Essas funções são do tipo, $y = \frac{k}{x}$, sendo $k$ a constante de proporcionalidade inversa.

## Situação 4

**1.** O custo médio para produzir x unidades de um determinado bem é dado pelo quociente entre o custo total envolvido com a produção e o número de unidades produzidas.

Considera que o custo total, em dólares, para produzir um $x$ unidades de um determinado bem é dado pela expressão $C(x) = 20 + x$.

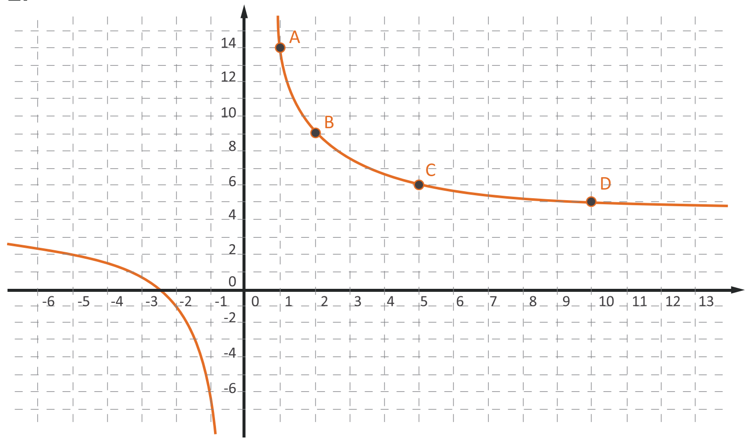
**1.1.** Determina a função do custo médio, $C^m$.

**1.2.** Representa graficamente a função que representa o custo médio com a produção de x unidades de bem.

### Soluções – situação 4

**1.** $C(x) = \frac{10+4x}{x} = 4 + \frac{10}{x}, com\ x \neq 0.$

**2.**




### Informação complementar

A função que surgiu tem a variável no denominador, não se inserindo no tipo de funções já estudado. Esta função, tal como as funções de proporcionalidade inversa fazem parte de uma família de funções que se designam por funções racionais.O gráfico de uma função racional está sobre uma linha curva, que compreende dois ramos, que se chama hipérbole.

A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos (focos) desse plano é igual a uma constante e menor do que a distância entre eles. Essa constante corresponde à distância entre os vértices

### Definição

Uma **função racional** é uma função real de variável real que pode ser definida por uma expressão do tipo $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, em que $A(x)$ e $B(x)$ são polinómios em $x$ e $B(x)$ é um polinómio não nulo.

O domínio, $D_f$, de uma função racional $f$, é o conjunto dos números reais que não anulam o denominador.

Simbolicamente, tem-se:

$$D \ = \{x \in IR: B(x) \neq 0\}.$$

**Exemplo resolvido** – *determinar o domínio de uma função racional*

**1.** Determina o domínio das seguintes funções racionais *f* e *g*, definidos por:

**1.1** $f(x) = \frac{1}{x-4}$.

*O domínio da função é* $D_f = \{x \in IR: x - 4 \neq 0\}$ *ou seja,* $D_f = IR\backslash\{4\}$

**1.2** $g(x) = 4 + \frac{2}{2x-1}$

*O domínio da função é* $D_g = \{x \in IR: 2x - 1 \neq 0\}$, *ou seja,* $D_g = \{x \in IR: x \neq \frac{1}{2}\}$. *Logo,* $D_g = IR\backslash\{\frac{1}{2}\}$.

**Proposta de trabalho de grupo** – *Tranformações de funções racionais*

**1.** Seja *f* uma função real de variável real definida *f*, definida em IR\{0} por *f*(*x*)= $\frac{1}{x}$.

**1.1** Esboça o gráfico da função *f*.

**1.2** A partir do gráfico obtido, faz um estudo da função *f* quanto aos seguintes aspetos:

**a)** zeros;

**b)** sinal;

**c)** contradomínio;

**d)** interseção com a reta de equação y=0.

**e)** o que observas quando $x$ tende para zero? E quando $x$ tende para infinito?

**1.3** Representa graficamente as funções definidas por *g*(*x*)= $\frac{1}{x+2}$ e *g*(*x*) = 2 + $\frac{1}{x}$. O que observas?

**Nota:** sempre que possível, este trabalho de grupo poderá ser potenciado recorrendo à calculadora gráfica ou ao computador.

TAREFA **8:**

**1.** O rendimento *per capita* é calculado através da razão entre o rendimento do agregado familiar e o número de elementos que o constituem.

O rendimento mensal de um agregado familiar, constituído pela mãe e por *x* filhos, é 400 *USD*.

**1.1** Escreve a expressão do rendimento *per capita* mensal do agregado.

**1.2** Sabendo que o rendimento *per capita* desse agregado é 100 *USD*, determina o número de filhos do agregado.

**2.** Uma empresa tem capacidade para produzir até 30 000 unidades de peças. O custo, em *USD*, da produção diária de *x* milhares de peças é dado pela função *C*, definida por $C(x) = 10x^2 + 4x + 3,\ 0 \leq x \leq 30$..

**2.1** Se num dos dias a empresa produzir 6 500 peças, qual o custo médio por peça?

**2.2** No contexto da situação apresentada, qual o significado do quociente $\frac{C(x)}{1000x}$.

**2.3** Num dos dias de produção, o custo médio unitário foi 18 cêntimos do dólar. Determina um valor aproximado para de produção desse dia, sabendo que se produziram mais de 10 000 peças.